fonction de la sélection naturelle, mais je sais que je l'aime, et je ressens et agis selon ce que je sais. Considérée objectivement, la chose est entièrement, profondément schizoïde ; pourtant le fait est qu'en tant que profanes subjectifs nous ne ressentons pas souvent ce conflit. Parce que bien sûr nos vies sont à 99,9 % opérationnelles concrètement, et nous opérons concrètement à partir de ce que nous savons, pas de ce que nous « savons ».

Une fois encore, nous parlons de profanes comme vous et moi, pas des géants de la philosophie et des maths, dont la plupart avaient, c'est connu, des difficultés à naviguer dans le monde réel. Einstein sortant de chez lui en pyjama, Gödel incapable de se nourrir, et ainsi de suite. Pour comprendre à quoi ressemble la vie intérieure des grands scientifiques/mathématiciens/métaphysiciens, nous devons simplement nous installer et essayer de former une idée vraiment rigoureuse et cohérente – et pas une idée brouillonne ou « *Nouvel Obs* » – de ce que nous voulons *vraiment dire* par « omnipotent », ou « entier », ou « illimitable », ou « fini mais sans bornes ». Essayer de produire un peu de pensée abstraite disciplinée et dirigée[10]. Un effort très précis mais indéfinissable, évoquant une fugue, doit être produit pour ce genre de pensée, une sensation dont le processus épileptique consistant à répéter « stylo, stylo » encore et encore n'est qu'une vague et pâle évocation. L'une des voies les plus rapides pour accéder à cette impression est (je parle d'expérience matinale personnelle) d'essayer de penser aux dimensions. Il y a quelque chose que je « sais », à savoir que des dimensions spatiales au-delà du Trio Majeur existent. Je peux même construire un tesseract ou un hypercube avec du carton. Étrange sorte de cube-dans-un-cube, le tesseract est la projection 3D d'un objet 4D, de la même manière que « ❒ » est une projection 2D d'un objet 3D. L'astuce est d'imaginer les lignes et les plans du tesseract à 90° les uns des autres (c'est la même chose avec « ❒ » et un cube réel), parce que la 4^{e} dimension spatiale est une dimension qui en quelque sorte existe en formant des angles droits parfaits avec la longueur, la largeur et la profondeur de notre champ visuel habituel. Je « sais » tout

10. L'unique et redoutable D^{r} E. Robert Goris, chargé des cours de maths avancées (1re et 2^{e} années) au lycée de U., se référait à ceci également comme à de la « pensée de secteur privé », signifiant que des résultats réels et productifs étaient attendus.

ceci, tout comme vous probablement... mais à présent essayez de vraiment vous le représenter. Concrètement. Vous pouvez ressentir, presque immédiatement, une tension au tréfonds de vous-même, entendre les premiers fils en train de lâcher dans votre esprit, dont les coutures commencent à céder.

En ce qui concerne « savoir » *vs* réellement, vraiment *savoir*, la seconde catégorie est ce que Descartes désignait par « appréhension claire et distincte » et ce que l'argot moderne connote *via* « maîtriser » ou « gérer ». Voilà encore le côté épistoschizoïde de l'esprit profane moderne : nous avons l'impression de « savoir » des choses que l'appareillage conceptuel de notre esprit ne peut pas vraiment maîtriser. Ce sont souvent des objets et des concepts situés loin aux confins de l'abstraction, des choses que l'on ne peut littéralement pas imaginer : des variétés de dimension $n > 3$, la chorégraphie quantique, les ensembles fractals, la matière noire, les racines carrées de nombres négatifs, les bouteilles de Klein et les cubes de Necker et les escaliers de Penrose. Et ∞. Souvent, ce type de choses est caractérisé par le fait qu'elles n'existent qu'« intellectuellement » ou « mathématiquement ». Encore une fois, ce que ceci signifie est loin d'être clair, bien que l'utilisation des termes eux-mêmes soit un jeu d'enfant.

Notez, s'il vous plaît, que cette capacité profane à diviser notre conscience et à « savoir » des choses que nous ne pouvons pas maîtriser est typiquement moderne. Les Grecs de l'Antiquité, par exemple, ne savaient pas faire ça. Ou ne l'auraient jamais essayé. Ils avaient besoin que les choses soient nettes, et pensaient qu'on ne pouvait pas savoir quelque chose tant qu'on ne le comprenait pas vraiment [11]. Ce n'est pas un accident si leurs mathématiques ne contenaient ni 0 ni ∞. Leur mot pour « infini » voulait aussi dire « désordre ».

L'esprit grec a influencé la philosophie et la pratique des mathématiques depuis le début. Les vérités mathématiques sont établies par des démonstrations logiques et sont extrêmement propres et nettes. C'est précisément ceci qui dédouane les maths des problèmes labyrinthiques tels que la justification exacte du

11. **SVI** C'est pourquoi la plupart de l'œuvre de Platon (et presque tout Aristote) tourne autour de la conceptualisation et de la systématisation de l'abstrait.

principe d'induction : les relations mathématiques et les démonstrations ne sont pas inductives mais déductives, formelles. Les maths sont, en d'autres termes, un système formel, « formel » signifiant pure forme, 100 % abstrait. L'idée fondamentale est que les vérités mathématiques sont certaines et universelles précisément *parce qu'*elles n'ont aucun rapport avec le monde. Si c'est un peu opaque, voici un passage de *L'Apologie d'un mathématicien* de G. H. Hardy, la prose la plus lucide jamais écrite en anglais sur les maths :

> « La certitude des mathématiques, écrit [A. N.] Whitehead, tient à leur parfaite généralité abstraite. » Quand nous affirmons que $2 + 3 = 5$, nous affirmons une relation entre trois groupes de « choses », qui ne sont ni des pommes ni des pièces de monnaie, ni des objets particuliers d'une sorte ou d'une autre, mais seulement des choses, « n'importe quelles choses ». Le sens de l'énoncé est entièrement indépendant du caractère individuel des éléments de ces ensembles. Tous les « objets » mathématiques, les « entités », les « relations », comme « 2 », « 3 », « 5 », « + » ou « = », toutes les propositions mathématiques où ils figurent, sont parfaitement généraux au sens où ils sont parfaitement abstraits. De fait, l'un des termes de Whitehead est de trop, puisque la généralité, dans ce sens, est justement l'abstraction.

Et dans cette citation, veuillez noter que « généralité » ne se réfère pas juste au caractère abstrait des termes et référents individuels mais à la complète et abstraite *universalité* des vérités affirmées. C'est la différence entre un simple fait vaguement matheux et un théorème mathématique. Un exemple fameux de cette différence (fameux pour les étudiants du D^r^ Goris, en tout cas) est que (1) « La somme de la série $(1+3+5+7+9) = 5^2$ » est un fait, alors que (2) « Pour tout x, la somme des x premiers entiers impairs $= x^2$ » est un théorème, c.-à-d. des maths réelles.

Ce qui suit ici se veut principalement un rappel de trucs que vous savez déjà grossièrement ou que vous avez vus à l'école. Si votre familiarité avec les systèmes formels n'est pas trop sommaire, vous reconnaîtrez ces trois ¶ suivants comme extrêmement rudimentaires et simplistes et vous êtes invité à les considérer comme **SVI** et à les sauter ou à les survoler. Un système formel de démonstration nécessite des *axiomes* et des *règles d'inférence*.

Les axiomes sont des propositions basiques si évidentes qu'elles peuvent être affirmées sans démonstration. P. ex. rappelez-vous les axiomes d'Euclide ou les postulats de Peano, à l'école. Les règles d'inférence, qui sont parfois appelées les lois de la pensée, sont les principes logiques qui permettent de tirer des vérités d'autres vérités [12]. Certaines des règles d'inférence sont aussi simples que le principe d'identité, qui dit fondamentalement que si une chose est P, alors elle est P. D'autres sont plus compliquées. Pour nous, deux règles d'inférence sont particulièrement importantes. La première est connue comme le *principe du tiers exclu* (PTE). Selon le PTE, une proposition mathématique P doit être ou vraie ou, si pas vraie, fausse [13]. L'autre grande règle d'inférence concerne la relation logique d'*implication*, signifiant « si ... alors » et souvent représentée par le symbole « → ». La règle d'implication la plus évidente est que (1) « P → Q » et (2) « P est vraie » autorise à conclure que (3) « Q est vraie ». Celle que nous allons beaucoup utiliser est la contraposée de cette règle et est d'habitude appelée *modus tollens* ; elle dit que (1) « P → Q » et (2) « Q est fausse » certifie que (3) « P est fausse » [14].

12. N.B. Importante ou pas, une vérité démontrée, dans un système formel, est techniquement connue comme un *théorème* – d'où le théorème de Pythagore, etc.

13. **SVI** La partie « ou, si pas vraie » est obligatoire en logique formelle à cause de certaines propriétés de l'opérateur disjonctif « ou ». Nous utiliserons aussi peu que possible ce genre d'arcane. (Sauf que pendant qu'on y est, confessons que nous utilisons « PTE » d'une manière informelle qui englobe également le *principe de bivalence*. Se contenter de « PTE » pour connoter tout le machin de la logique binaire nous convient très bien ici, mais sachez que ce n'est pas 100 % rigoureux.)

14. Le *modus tollens* (= locution latine signifiant « méthode de négation ») peut ne pas ressembler à une règle universelle mais vous devez garder à l'esprit que l'implication, en tant que relation logique, n'a rien à faire de la cause mais seulement de la certitude. *Condition nécessaire* et *suffisante* sont les termes de logique appliquée. Si, par exemple, P représente « mesure 1,50 m » et Q représente « mesure au moins 1,45 m », alors le sens purement logique de « P → Q » devient évident : cela signifie en fait « Si P est vraie alors il est impossible que Q soit fausse ». *Modus-tollenniser* ceci en « non-Q → non-P » est simplement dire que si quelqu'un ne mesure pas 1,45 m alors il est impossible qu'il mesure 1,50 m.

Au fait, une autre relation logique va être importante beaucoup plus loin en §5^{e}, et nous pourrions aussi bien l'introduire ici. C'est la relation de *conjonction*, signifiant « et », habituellement symbolisée par « & » ou « ∧ ». La grande règle est que « P & Q » est vraie uniquement lorsque P et Q sont toutes les deux